

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

[博客园](#)
[首页](#)
[新随笔](#)
[联系](#)
[订阅](#) 
[管理](#)

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
[+加关注](#)

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)



搜索

[找找看](#)

[谷歌搜索](#)

常用链接

[我的随笔](#)
[我的评论](#)
[我的参与](#)
[最新评论](#)
[我的标签](#)

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

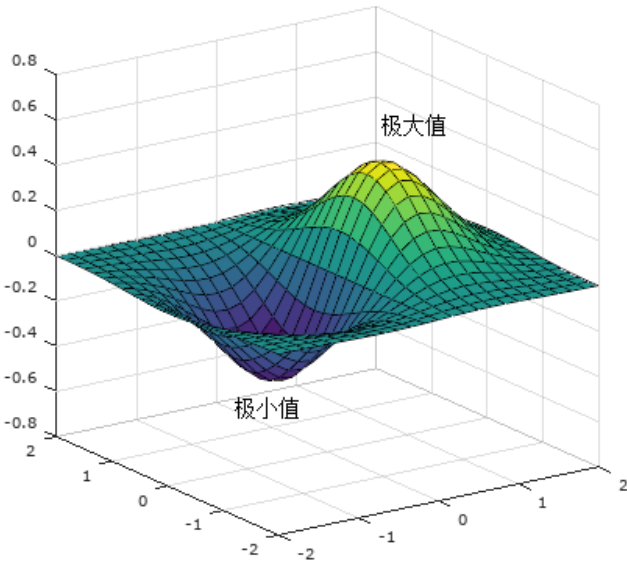
多变量微积分笔记3——二元函数的极值

什么是极值

极值不同于最值，极值的定义如下：

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域 D 有定义，且对 D 中除 x_0 的所有点，都有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值。同理，若对 D 的所有点，都有 $f(x) > f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值。极大值和极小值也称为局部最大值和局部最小值。

如果用图形解释，那么：当我们在极大值点上，向任何方向移动输入点都会减小函数值；当我们在极小值点上，向任何方向移动输入点都会增加函数值。



极值的概念来自数学应用中的最大最小值问题。根据极值定律，定义在一个有界闭区域上的每一个连续函数都必定达到它的最大值和最小值，问题在于要确定它在哪些点处达到最大值或最小值。极值点只能在函数不可导的点或导数为零的点上取得。

极值定律：当函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续函数时，存在 c 属于 $[a,b]$ ， d 属于 $[a,b]$ ，有 $f(c) \leq f(x) \leq f(d), x \in [a,b]$ 成立。

可以看出，极值是一个局部概念，我们可以说极大值是函数在某个区间内的最大值。一个函数可能有多个极值，如下图所示，B,C,D,E均为极值点：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

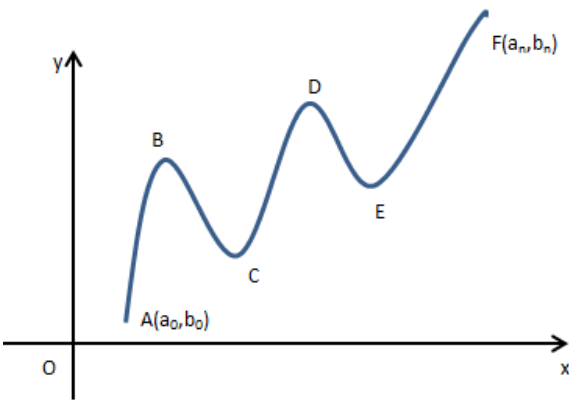
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



对于一元函数，求得极值和最值较为容易，但是对于多元函数，情况就复杂的多。这里主要介绍如何求解二元函数的极值（对于更多元函数的极值，在后续章节学习梯度后将继续阐述），在此之前还需要弄清楚另外两个点——临界点和鞍点。

临界点（驻点）

对于一个多元函数f，如果有一个点满足f所有自变量的偏导都同时为0，那么这个点被称为f的临界点，也称为驻点。

对于二元函数f(x, y)来说，临界点(x₀, y₀)满足：

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0 \text{ and } f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$$

示例：求f(x, y) = x² - 2xy + 3y² + 2x - 2y的临界点

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y + 2 = 0 \\ f_y = -2x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

f(x)只有一个临界点(-1, 0)

由于极值点只能在函数不可导的点或导数为零的点上取得，所以临界点成为求解极值点的关键。现在的问题是，上面的叙述反过来并不成立，也就是临界点未必是极值点；另一个问题是，当临界点是极值点时，如何判断极值是极大值还是极小值？

在此之前先来认识一下鞍点。

鞍点

既不是极大值点也不是极小值点的临界点，叫做鞍点。

鞍点这词来自于不定二次型z=y²-x²的图形，像马鞍：x-轴方向往上曲，在y-轴方向往下曲。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

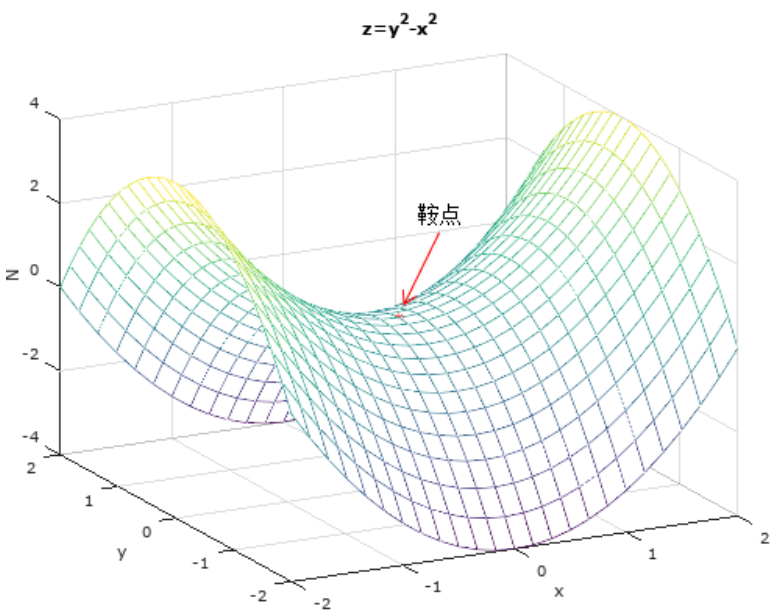
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

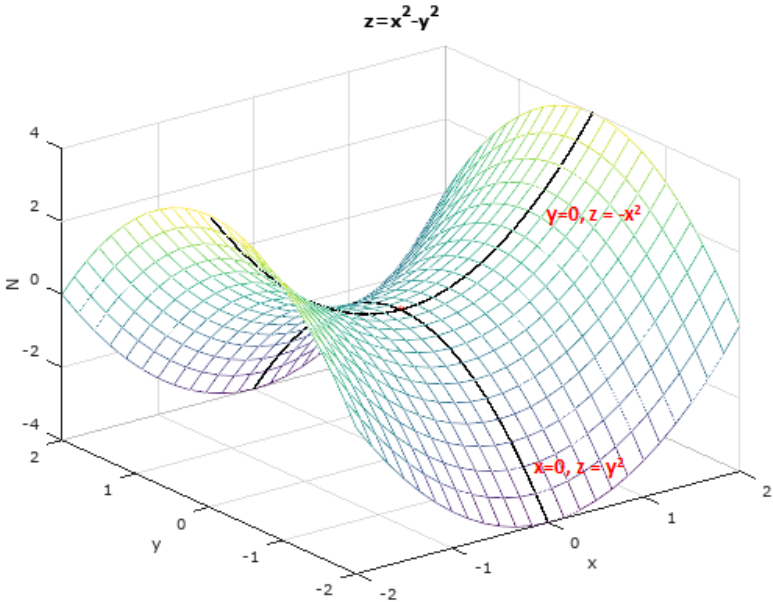
5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU



在 $z=y^2-x^2$ 鞍点处，沿y轴方向向两边移动，函数值会减小；沿x轴方向向两边移动，函数值会增大：

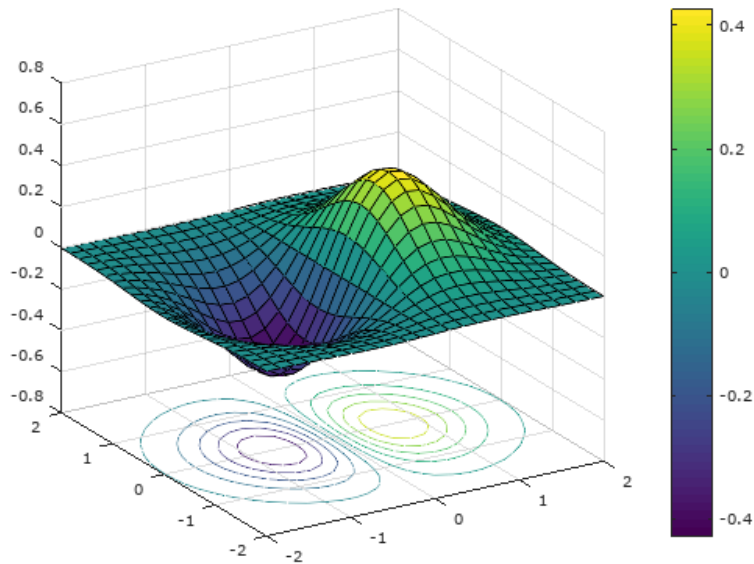


求得极值点

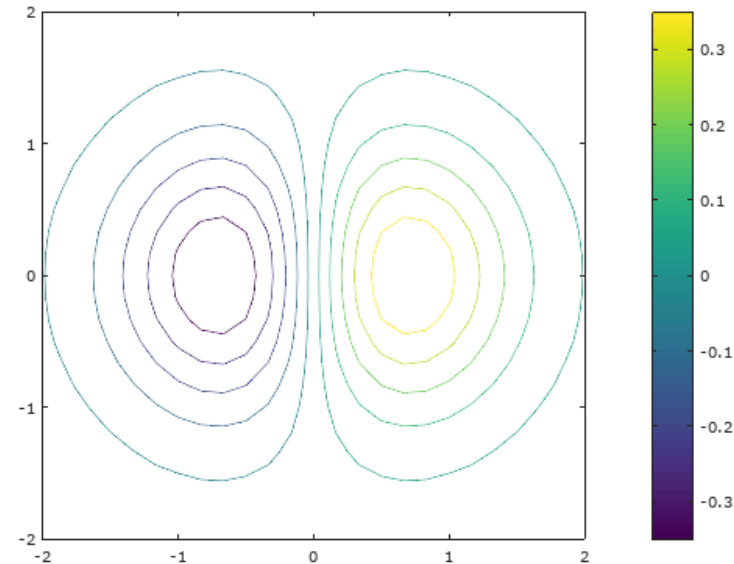
现在回到最初的问题——如何寻找极值。

通过作图寻找

最直观的办法是通过作图寻找，在图中很容易找到极值：



很明显，凹凸处就是极值。
等高线图同样容易寻找极值：



在等高线图中，极大值和极小值看起来是一样的，需要读出函数的数值：极小值周围，函数值向外递增；极大值周围，函数值向外递减。

通过二阶偏导判定

虽然作图法最直观，但二元函数通常很难作图，更多元的函数甚至无法作图，幸而数学家们找到了一种更为通用的办法，这就是里利用二阶导数判断。

$f(x, y)$ 的一个临界点是 (x_0, y_0) ，即 $f_x(x_0, y_0) = 0$ && $f_y(x_0, y_0) = 0$ ， f 的二阶导数是 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} 现在，

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

该临界点有如下结论：

$$1) AC - B^2 > 0 \text{ \&\& } A > 0 \Rightarrow \text{极小值}$$

$$2) AC - B^2 > 0 \text{ \&\& } A < 0 \Rightarrow \text{极大值}$$

$$3) AC - B^2 < 0 \Rightarrow \text{不是极值 (鞍点)}$$

$$4) AC - B^2 = 0 \Rightarrow \text{不确定}$$

示例 三

示例1

求函数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ 的极值

1) 计算偏导

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

2) 计算临界点

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

临界点是(0, 0)或(1, 1)

3) 计算二阶偏导

$$A = f_{xx} = \frac{\partial(3x^2 - 3y)}{\partial x} = 6x$$

$$B = f_{xy} = \frac{\partial(3x^2 - 3y)}{\partial y} = -3$$

$$C = f_{yy} = \frac{\partial(3y^2 - 3x)}{\partial y} = 6y$$

4) 判断临界点类型

在(0, 0)处, $AC - B^2 = -9 < 0$, (0, 0)是鞍点;

在(1, 1)处, $AC - B^2 = 27 > 0$, $A = 6 > 0$, (1, 1)是极小值点, 此处的极值是 $f(1, 1) = -1$

示例2

做一个2体积单位的长方体有盖木箱, 长宽高怎样取值才能最省料?

设木箱的长宽分别为x和y, 则高是 $4/xy$, 用料的面积

$$A = 2\left(xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}\right), \quad x > 0 \text{ and } y > 0$$

计算偏导:

$$A_x = \frac{\partial A}{\partial x} = 2\left(y - \frac{2}{x^2}\right), \quad A_y = 2\left(x - \frac{2}{y^2}\right)$$

找到临界点:

$$\begin{cases} A_x = 2\left(y - \frac{2}{x^2}\right) = 0 \\ A_y = 2\left(x - \frac{2}{y^2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \\ y = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

此时先不要急于寻找极值点，极值点可能是局部最小或最大点，我们要寻找的是全局最小点。最值可能出现在几个点上，临界点、函数边界或无穷远处。在用料面积A来说，如果x或y趋近于 ∞ ，则 $xy \rightarrow \infty$ ， $A \rightarrow \infty$ ；如果 $x \rightarrow 0$ 或 $y \rightarrow 0$ ，则 $(2/x) \rightarrow \infty$ 或 $(2/y) \rightarrow \infty$ ， $A \rightarrow \infty$ 。因为我们确定，在体积一定的情况下一定存在最小用料，所以临界点是极小点，同时也使全局极小点，即最小点。从这个例子中也看出，在体积一定的长方体中，以正方体的表面积最小。

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: 多变量微积分

标签: 极值

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

4

推荐

0

反对

« 上一篇: 多变量微积分笔记2——最小二乘法

» 下一篇: 多变量微积分笔记4——全微分与链式法则

posted on 2018-01-19 22:40 我是8位的 阅读(22775) 评论(0) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

6staredu.com

python编程/
爬虫/免费公开
课

打开

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日~3月18日

**最新新闻:**

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes